ДИС

11

Поле - множество $\mathbb{R}$ с две операции (събиране и умножение)

1) $a+b=b+a$
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$
3) $\exists 0\in\mathbb{R}$ т.че $a+0=a \quad \forall a\in\mathbb{R}$
4) $\forall a\in\mathbb{R} \ \exists b\in\mathbb{R}$ т.че $a+b=0 \quad (b=-a)$
5) $a.b=b.a$
6) $a(b.c)=(a.b).c$
7) $\exists 1\in\mathbb{R}$ т.че $a1=1a=a$
8) $\forall a\in\mathbb{R}, a\neq 0 \ \exists b\in\mathbb{R}$ т.че $ab=1 \quad (b=a^{-1}=\frac{1}{a})$
9) $a(b+c)=ab+ac$

до тук - Поле

10) В $\mathbb{R}$ е въведена релация на наредба означавана "$<$", за която са изпълнени:
Ако $a<b<c$ то $a<c$
11) За $\forall a,b\in\mathbb{R}$ е в сила точно едно от трите възможности: $a<b$, $b<a$, или $b=a$
Връзка между наредбата и операциите $+$, $\cdot$
12) Ако $a>0$ и $b>0$ то $a.b>0$
13) Ако $a<b$ то $a+c<b+c$

до тук - Наредено поле

$A\subset\mathbb{R}$ казваме че е ограничено отгоре, ако съществува $M\in\mathbb{R}$ т.че за $\forall x\in A$ е изпълнено $x\leq M$

забележка: $a\leq b$, ако $a<b$ или $a=b$ (M-горна гр)
$a\geq b$, ако $a>b$ или $a=b$ (M - долна гр) $x\geq M$

Дефиниция
А е ограничено множество ако е ограничено отгоре и отдолу

Дефиниция
Нека $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, казваме че a е точна горна граница за A, ако за $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ т.че $a - \varepsilon < x$

Нека $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, казваме че a е точна долна граница за A, ако за $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ т.че $a + \varepsilon > x$

$\sup A$ - точна горна граница (ТГГ)
$\inf A$ - точна долна граница (ТДГ)

Принцип за непрекъснатост
∀ непразно ограничено отгоре подмножество на $\mathbb{R}$ има точна горна граница

Следствия

$0x = 0$ за $\forall x \in \mathbb{R}$
Док-во
$a + 0x = a + x - x + 0x = a + (x + 0x) - x = a + (1+0)x - x =$
$= a + x - x = a$
$-a = -1a$
Док-во
$a + (-1)a = 0 \Rightarrow a(1 + (-1)) = a \cdot 0 = 0$
$(-1)(-1) = 1$

4) за всяко наредено поле
ако $a \neq 0$ то $a^2 > 0$

5) в $\mathbb{C}$ няма наредба
(не е наредено поле) съгласувана със $\oplus$ и $\odot$
$i \in \mathbb{C}$, $i \neq 0$ $i^2 = -1 < 0$

6) Принцип на Архимед
Множеството на естествените числа $\mathbb{N}$ е неограничено отгоре
Дои-во
С допускане на противното
Следователно за $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists M \in \mathbb{R}$ т.че $n \leq M$
следователно $\exists$ точна горна граница за $\mathbb{N}$
т.е. $\exists M_1 \in \mathbb{R}$ т.че за $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq M_1$ и $\forall \varepsilon > 0$
$\exists m \in \mathbb{N}$ т.че $M_1 - \varepsilon < m$, $m+1 \in \mathbb{N}$
$M_1 - \varepsilon < m \leq M_1$ и $M_1 < m + \varepsilon < m+1$
$m+1 \in \mathbb{N}$

Задача

Нека $M \neq \emptyset$, $M \subset \mathbb{R}$ е ограничено отдолу
Доказване че $-M \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in M\}$ е ограничено отгоре и $\sup(-M) = -\inf M$

$\forall \varepsilon > 0$, $\inf M + \varepsilon > x \geq \inf M$ за някой $x \in M$
$-(\inf M + \varepsilon) < -x \leq -\inf M$ /след умн с (-1)
$-\inf M - \varepsilon < -x \leq (-\inf M)$ - нова ТПТ

Нека $M \neq \emptyset$, $M \subset \mathbb{R}$ е ограничено отгоре. Дои.че
$-M \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in M\}$ е отдолу и $\inf(-M) = -\sup M$
за $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in M$, т.че $\sup M \geq x > \sup M - \varepsilon$ /.(-1)
нова ТДГ - $(-\sup M) \leq -x < -\sup M + \varepsilon$

$M \neq \emptyset$, $M \subset \mathbb{R}$ (M - ограничена отгоре, N - долу)

Да се докаже че $M - N$ е ограничена отдолу

$\inf(M-N) = \inf M - \sup N$

$M - N = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x - y, x \in M, y \in N\} \Rightarrow$

$\exists \inf M, \sup N$ поради Аксиома 14 т.е.

За $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in M$ т.че $\inf M + \varepsilon > x > \inf M$

и $\exists y \in N$ т.че $\sup N - \varepsilon < y \leq \sup N \mid .(-1) \Rightarrow$

$\varepsilon - \sup N > -y \geq -\sup N \Rightarrow$

$2\varepsilon + \inf M - \sup N > x - y \geq \inf M - \sup N$

$M = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ пресметнете $\sup M$ и $\inf N$

Допускаме противното

за $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ т.че $\frac{1}{n} > M \mid .(-1) \Rightarrow \frac{1}{n} > n$